

LBRIS

We know
books

REVOLUȚIA ALGEBREI

Nașterea teoriei grupurilor

JORGE CALERO SANZ

Traducere de Ana-Maria Merticaru

LITERA
București

SUMAR

Capitolul 0. Matematicianul revoluționar	7
Copilăria lui Évariste Galois	9
<i>Ecuatii: o poveste fără soluție</i>	12
Deșteptarea revoluționară	14
<i>Povești paralele: viața lui Abel</i>	18
Un toast periculos	21
Trei cărți, două pistoale	24
Moștenirea lui Galois: teoria grupurilor	27
Capitolul 1. De la simetrie la grupuri	31
A deplasa pentru a rămâne la fel	38
<i>Maestra simetriei: Emmy Noether</i>	46
Așadar, ce anume este un grup?	48
Capitolul 2. Grupuri în grupuri: subgrupurile	61
<i>Condiția necesară și suficientă</i>	65
Să găsim subgrupurile: teorema lui Lagrange	68
<i>Un nou mod de a vedea D_n</i>	71
Despre ce este vorba când ne referim la normalitate	73

Capitolul 3. Etichetarea și arhivarea grupurilor: izomorfismele	77
<i>Aplicații bijective</i>	79
Nucleu și imagine	84
<i>Relații de echivalență</i>	86
Împărțirea grupurilor?	88
Prima teoremă a izomorfismului	90
O clasificare terifiantă a grupurilor finite	91
Capitolul 4. Grupul simetric S_n	95
<i>Divertiment³</i>	104
Teorema lui Cayley: catalogul grupurilor	106
<i>Poliedrele platonice</i>	109
Epilogul lui Galois	113
<i>Criteriul de ireductibilitate al lui Eisenstein</i>	118
Anexe	127
1. A deplasa pentru a rămâne la fel	127
2. O vizită la Alhambra	131
Lecturi recomandate	143

puțin, în condițiile în care nu reflectă imaginea pe care opinia publică o are despre matematician, care, în general, este aceea a unei persoane înaintea timpurilor și departe de lume; un fel de doctor Emmett Brown (Doc din *Înapoi în viitor*), substituind fluxurile canalizatoare cu cărți și teoreme. Probabil unii matematicieni se încadrează în acest clișeu, dar Galois este exemplul contrar. Viața sa scurtă pare scoasă dintr-un roman, iar studiile sale l-au transformat într-o legendă a matematicii.

Faima sa, totuși, nu se datorează doar vieții sale intense, ci și operei sale științifice, caracterizată de o creativitate și de o originalitate de neegalat. Galois s-a folosit de concepte pe atunci necunoscute, care depășeau cele mai avansate cunoștințe matematice ale acelor timpuri. A reușit să rezolve o problemă seculară: studierea posibilității de a rezolva ecuații de orice grad. Metodele sale erau atât de inovatoare încât nu erau înțelese și, din cauza unei serii de ghinioane, a fost nevoie să treacă mai mulți ani după moartea sa pentru a i se atribui recunoașterea muncii sale; și nu doar pentru rezultatele imediate, căci acele idei bizare ale sale s-au dovedit a fi baza unei teorii mult mai generale. Pentru toate aceste motive, viața lui Galois oferă o introducere interesantă acestei cărți care are ca temă teoria grupurilor. În paginile care vor urma îi vom urmări pașii pentru a cunoaște în profunzime povestea acestui personaj.

Adevărul este că viața lui Galois nu poate fi bine înțeleasă fără o cunoaștere a situației din Franța de la începutul secolului al XIX-lea. S-a născut la două decenii după Căderea Bastiliei (1789), episod care a dat startul Revoluției Franceze. Această revoltă a produs cea mai mare schimbare socială și politică cunoscută în Europa în acea epocă: s-a trecut de la absolutism la republică și, ulterior, la imperiul napoleonian, pentru a sfârși cu monarhia constituțională. Trecând peste senzația de secvență desprinsă din serialul *Urzeala Tronurilor*, toate acestea au implicat o nouă viziune a societății, în baza căreia este abolit feudalismul și proclamată *Declarația Drepturilor Omului și ale Cetățeanului* (și, mai târziu, ale femeii); în același timp, idei noi precum cele din motto-ul *Liberté, égalité, fraternité* inundau străzile Parisului și ale întregii Franțe. A fost o epocă de schimbări tumultuoase și revoluționare.

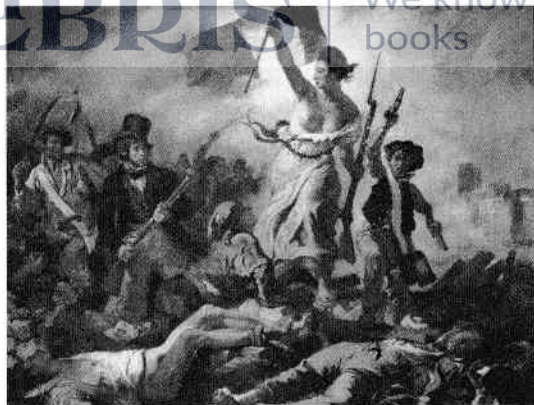


Figura 1. *Libertatea conducând poporul*, Eugène Delacroix (1830, Paris, Luvru). Opera cea mai reprezentativă pentru revoluțiile populare nu ilustrează celebra Revoluție Franceză din 1789, ci pe cea din 1830.

Copilăria lui Évariste Galois

Évariste Galois s-a născut la 25 octombrie 1811, la sud de Paris, în Bourg-la-Reine, în acele timpuri un sătuc în apropierea capitalei. A fost al doilea dintre cei trei fii (sora sa mai mare, Nathalie-Théodore, și frațele său mai mic, Alfred). Tatăl, Nicolas-Gabriel Galois, era directorul unei școli de idei liberale caracteristice regimului lui Napoleon. Mama sa, Adélaïde-Marie Demante, fiică de juriști, s-a ocupat de educația celor trei fii în perioada copilăriei, oferindu-le cunoștințe solide de latină și greacă.

La vârsta de doisprezece ani, Galois s-a îndepărtat de familie pentru a-și începe studiile în prestigiosul Liceu Louis-le-Grand. În cadrul acestei instituții au studiat o mulțime de personalități aparținând tuturor domeniilor, printre care matematicieni de succes precum Hermite, Borel sau Lebesgue. Liceul respectiv era un colegiu în care exista o disciplină de fier, mai apropiată de o închisoare decât de o școală. În plus, încăperile întunecate și ferestrele cu grății erau departe de a putea fi considerate un



Figura 2. Évariste Galois (aprox. 1826).

lux. În pofida acestor contradicții și grație educației timpurii primite din partea mamei, Galois a fost un elev bun în primii ani de studiu.

Galois avea 15 ani când destinul i-a jucat o festă: noul director, după luni de presiuni, a reușit să-l facă pe tânăr să repete cursul de retorică pe care deja începuse să-l frecventeze. În această privință, directorul susținea că era prea tânăr (era înainte cu un an de cursuri) și că nu avea maturitatea necesară. Chiar dacă nu le-a făcut plăcere, el și tatăl lui n-au avut de ales și au acceptat situația. Repetând cursul, Galois a descoperit matematica grație lui Jean Hyppolite Vernier, profesorul de matematică de la cursul pregătitor. Noul său profesor a decis să utilizeze drept manual *Elemente de geometrie* a lui **Adrien-Marie Legendre** (1752-1833). Legenda spune că Évariste a devorat tomul, gândit pentru un curs de doi ani, în doar două zile. Așa a luat naștere una dintre pasiunile care îl vor însoți de-a lungul vieții.

Galois a fost imediat impresionat de matematică. Obsesia sa pentru matematică l-a făcut să neglijeze complet toate celelalte materii, ceea ce s-a reflectat clar în evaluările profesorilor său care au descris atitudinea sa cu fraza „Este dominat de febra matematicii”, recomandându-le părinților să-l lase să se concentreze asupra acestei științe. Merita nota maximă doar Vernier, care, într-un fel de profeție, a menționat că metoda sa de lucru este heterodoxă. Între timp, Galois a reușit să treacă de la cartea lui Legendre la opere de o mai mare dificultate, precum unele texte ale lui **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813): *Leçons sur le calcul des fonctions, Réflexions sur la resolution algébrique de equations*, sau *Théorie des fonctions analytiques*.

Ajungem astfel la vara anului 1828. Asumându-și riscul, Galois a decis să se prezinte în iunie la examene pentru a intra la *École Polytechnique* (Institutul Politehnic). Avea aproape șaptesprezece ani, cu un



Figura 3. Joseph-Louis Lagrange.

an mai puțin decât vârsta normală a elevilor care se prezintă la admitere. Talentul său în ceea ce privește matematica nu a fost suficient și nu a trecut examenul. Tânărul Évariste nu s-a lăsat demoralizat de acest fapt și, resemnat, a hotărât să se întoarcă la *Louis-le-Grand* în octombrie, pentru a termina cursul de matematică și pentru a se pregăti mai bine.

Când s-a întors, l-a cunoscut pe profesorul **Louis Richard** (1795-1849). Dacă Vernier l-a făcut să se îndrăgostească de matematică, cu Richard și-a început cariera de matematician. Richard era un profesor bun, care știa să își motiveze elevii în timpul orelor de matematică. Imediat ce l-a cunoscut pe Galois a înțeles că se află în fața unui talent excepțional. Despre el a spus: „Acest elev le este net superior colegilor săi de clasă” și „Lucrează doar cu cele mai nobile elemente ale matematicii”. În sfârșit, Galois găsisse pe cineva cu care să își împartă pasiunea și care să îl înțeleagă. În plus, Richard era un matematician interesat de noutățile disciplinei și l-a îndrumat pe Galois mai departe, până la cercetarea matematică. Începând cu acest moment, Galois nu s-a mai dedicat doar citirii matematicii; aceștia sunt anii în care au început să prindă viață ideile sale.

În primăvara lui 1829, aceste idei, pe care le avea în minte de ceva timp, au început să înflorească. A dezvoltat concepte care l-au ajutat să găsească rezolvarea unei probleme seculare: care sunt ecuațiile (algebrice) ce au soluții ce se pot exprima prin radicali? A exprima prin radicali înseamnă reprezentarea ca o cantitate finită de adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri și extrageri de rădăcină pătrată. (A se vedea în acest sens: „Ecuatiile: o poveste fără soluție”.)

Galois a publicat în aprilie primul său articol în revista *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Vorbea despre rezolvarea ecuațiilor de gradul doi prin intermediul fracțiilor continue, un concept matematic destul de utilizat în epocă, dar care în prezent a ieșit din uz.

Convins de potențialul tânărului său discipol, Richard l-a încurajat să scrie două lucrări: *Recherches algébriques* și *Recherches sur les équations algébriques de degré premier*.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

În Italia renascentistă, se desfășoară un eveniment interesant plin de subterfugii, trădări și dueluri. În ceea ce privește ecuațiile, se găsesc soluțiile pentru ecuațiile de gradul trei și patru.

Totul părea să indice că ecuațiile de gradul cinci vor avea același destin. Totuși, au trecut secolele fără să se ajungă la o soluție; nici măcar în urma eforturilor unor matematicieni iluștrii precum Eulero sau Lagrange.

Această poveste, însă, a început să devină tulbure în jurul anului 1800. Principele matematicii, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), și-a exprimat suspiciunile în lucrările sale: probabil nu este posibilă furnizarea unei expresii cu radicali pentru rezolvarea ecuațiilor de gradul cinci. Atunci, și-a făcut apariția Paolo Ruffini (1765-1822), care în cartea sa *Teoria generală a ecuațiilor* afirma „Am ajuns până aici” și confirma ipoteza avansată de Gauss. Cu câteva mici erori, a demonstrat imposibilitatea de a rezolva prin radicali ecuațiile de gradul cinci sau de grad superior; cu toate acestea, cumunitatea matematică (cu excepția lui Cauchy) nu i-a apreciat demonstrația, care a fost dată uitării.

Cu această premisă, marele final al acestei povești a fost scris de doi tineri, unul norvegian și celălalt francez: Niels Henrik Abel și... Évariste Galois! În cadrul acestui capitol vom vedea care au fost descoperirile lor.

tuturor timpurilor, căruia Richard i-a vorbit despre talentul discipolului său.

La 25 mai, Cauchy a prezentat Academiei o lucrare a lui Galois și după o săptămână, încă una. Procedura era similară celei urmate și în prezent de cercetătorii care doresc să publice în reviste: materialul era



Figura 4. Augustin Louis Cauchy.

trimis Academiei, unde trebuia să facă față unei birocrații teribile. Apoi, ajungea într-un fel de comisie, iar unii dintre membri aveau sarcina de a citi materialul și de a întocmi un raport de evaluare. Acest raport era folosit de ceilalți membri rămași, în timpul unei ședințe în care era emis verdictul. În sfârșit, evaluatorii primei lucrări au fost însuși Cauchy, **Joseph Fourier** (1768-1830) și **Claude-Louis Henri Navier** (1785-1836); iar pentru cea de-a doua, din nou Cauchy, împreună cu **Siméon-Denis Poisson** (1781-1840). Un superb full de popi care să îi evalueze munca! Ce s-a întâmplat după?

Înainte de a cunoaște verdictul, viața lui Évariste Galois a ajuns la o răscruce. În acea etapă a vieții sale, necazurile depășeau puținele bucurii pe care le avea, iar tragedia a început să îi marcheze existența.

Deșteptarea revoluționară

Să aprofundăm contextul politic al deceniului: la moartea lui Ludovic al XVIII-lea, în 1824, a urmat la tron fratele său Carol al X-lea, ultimul rege al Casei franceze de Bourbon. Revoluția Franceză adusese cu ea noi idealuri progresiste și liberale, dar nu toată lumea îmbrățișa astfel de idei. În acea epocă, tensiunea dintre liberali și monarhiști era în creștere. Noul monarh era apropiat de sectoarele mai conservatoare și reacționare, ceea ce a avut ca rezultat accesul la putere al Bisericii și al așa-zișilor „ultramonarhiști”. Să ne întoarcem totuși la micuța localitate Bourg-la-Reine, unde primar era Nicolas-Gabriel, tatăl lui Galois, care, în pofida ideilor sale liberale, și-a păstrat funcția în perioada restaurației bourbonilor. Totul urma să se schimbe în 1829. În acel an, în localitate a sosit noul preot care, împreună cu ultramonarhiștii locului, și-a propus să pună capăt carierei primarului și, probabil, negăsind alte instrumente, a recurs la minciună și defăimare. A fost lansată o



Figura 5. La stânga: portretul lui Nicolas-Gabriel Galois. La dreapta: placa comemorativă amplasată în orașul Bourg-la-Reine. Pe ea se poate citi: „În memoria Domnului Galois. Primar al Bourg-la-Reine timp de 15 ani. Decedat în 1829. Cetățenii recunoscători”.

campanie de calomniere, în care circulau mesaje ale căror autori râdeau de concetățenii lor, aceștia dându-se drept tatăl lui Galois. Incapabil să pună capăt scandalului, acesta s-a afundat în depresie. În final, s-a sinucis pe 2 iulie 1829.

Cum era de așteptat, pe Galois l-a întristat profund moartea tragică a tatălui. Pe deasupra, faimosul preot a dorit să officieze slujba de înmormântare, după ce uneltise împotriva bietului om; toată povestea a degenerat într-un scandal. Până în acest moment am vorbit foarte puțin despre convingerile politice ale lui Galois. Este de presupus că până atunci împărtășise ideile liberale ale părinților săi, dar acel lanț de evenimente și finalul fatal l-au schimbat și i-au scos la iveală latura rebelă; astfel, a decis să participe la revoltele liberale și republicane.

Nu era posibil un scenariu mai nefericit în care să aibă loc cea de-a doua tentativă de admintere la École Polytechnique. Cea de-a doua și ultima, dat fiind că era posibilă doar susținerea a două examene. La o lună de la înmormântarea tatălui, a avut loc examenul și, după cum cititorul probabil și-a imaginat, rezultatul a fost același: respins. Legenda spune că Galois a sfârșit prin a arunca ciorna lucrării sale în capul examinatorilor care nu i-au înțeles raționamentele. Nu există vreo dovadă

a acestui episod, care ar putea chiar să fie fals; dar cu toate acestea, este plauzibil, ținând cont de lipsa de răbdare și de temperamentul irascibil pe care îl avea tânărul Galois.

Odată închisă calea către École Polytechnique, Galois a fost nevoit să găsească un alt mod de a-și câștiga existența. Așadar, a decis să se înscrie la mai puțin faimoasa École Préparatoire. Această școală, concepută inițial ca École Normale, se ocupa de formarea profesorilor de liceu. În acest sens, trebuia mai întâi să obțină diploma în științe și litere, ceea ce i-a dat mari speranțe tânărului. În luna decembrie a aceleiași an, a trecut examenele. Mai rămânea examenul de admitere. Ca și în cazul liceului, diferențele dintre note erau atât de mari încât a obținut diploma doar grație unui examen strălucit la matematică. Profesorul de la examenul de fizică a zis: „Nu știe absolut nimic” și „Mi s-a spus că este foarte bun la matematică, ceea ce mă surprinde oarecum”. La începutul anului 1830, a semnat contractul cu instituția. A obținut o bursă de studiu cu care putea să supraviețuiască și a început să studieze matematica.

De asemenea, în ianuarie 1830, Academia de Științe părea că se va pronunța în favoarea lucrărilor lui Galois. Dar în ziua de 18, data stabilită pentru Cauchy să își exprime părerea, acesta a motivat că este bolnav și că nu se poate prezenta. Săptămâna următoare, Cauchy a mers la Academie, dar în expunerea sa a ignorat total munca lui Galois și a prezentat-o doar pe a sa. Printre bârfele care circulă în domeniul matematicii, una îl definește pe Cauchy ca o persoană „concentrată pe ea însăși”, un alt mod de a spune că era un pic narcisist. Se pare că, în această situație, negându-i lui Galois recunoașterea, a prevalat atitudinea egoistă. Aparent, lucrurile nu au cum să meargă mai rău de atât, nu-i așa?

Restul poveștii este de-a dreptul extraordinar. Galois era neliniștit, dat fiind că nu obținea răspunsul Academiei, astfel că a scris din nou materialul predat inițial și l-a prezentat Academiei, în încercarea de a obține recunoașterea pe care considera că o merită. Titlul noii opere era *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*.